**Séries entières – Démonstrations**

Lemme d’Abel : Soit une suite de nombres complexes. Soit tel que la suite est bornée. Alors pour tout tel que , la série numérique converge absolument.

Démonstration : ⍟

* Si , tel que , donc la propriété est vérifiée.
* Si soit tel que . Comme la suite est bornée,

Alors

Or la série géométrique CV, donc par comparaison de SATP, CV, donc la série numérique CVA

Propriété : Soit une série entière de rayon de convergence . Soit

1. Si , la série numérique CVA
2. Si , la série numérique DVG

Démonstration : ⍟

1. Si , tel que . On suppose donc

Comme , n’est pas un majorant de

Donc il vérifiant

On peut alors appliquer le Lemme d’Abel (car est bornée, et donc la série CVA.

1. Si donc

C’est-à-dire que est non bornée, or

Donc est non bornée.

Alors la série DVG

Règle de d’Alembert

Soit une suite de nombres complexes tels que .

Si , alors le rayon de convergence de la S.E. vérifie , avec les conventions et

Démonstration : ⍟

Soit , posons , alors

Et . De plus,

Ainsi par la règle d’Alembert appliquée à la série numérique  :

* Si , , donc la série numérique CV, donc CV(A)

Donc , ceci , donc

* Si , alors donc la série numérique DVG donc la série numérique DVG aussi.
* Donc tel que d’où en faisant tendre vers  :

D’où

Règle de Cauchy :

Soit une suite complexe. Si , alors le rayon de convergence de la S.E. vérifie , avec les conventions et .

Démonstration : ⍟

Soit , on étudie la nature de la série numérique .

et

* Si , alors , donc comme , par définition de la limite,

Et donc , donc ne tend pas vers 0.

Donc la série numérique DVG, donc

* Si , alors et

Donc par définition de la limite,

D’où par croissance de ,

Donc par comparaison de SATP, la série numérique CV,

D’où CVA, ceci tel que

Donc , donc par double inégalité,

Théorème : Soit une série entière de rayon de convergence . La série entière converge normalement sur tout disque fermé de centre O et de rayon , .

Démonstration : ⍟

Soit tel que

Notons . Soit ,

Ainsi la fonction est bornée sur et puisque la borne supérieure d’un ensemble est le + petit majorant de cet ensemble,

Mais , donc la série numérique CVA. Ainsi par comparaison de SATP, la série CV, d’où CVN sur .